数理解析研究所講究録
353巻 1979年 175-184

非同期ポリオートマトンの分類と各部分クラス間の関係

東京電機大学理工学部　　中村克彦

1．まえがき　この報告では広範囲の同期および非同期システムをふくむデジタル・システムのモデルを定義して，これを構造および推移に関する諸性質によって分類し，いくつかの部分クラス間の階層関係についてのべる．このモデルは同期－非同期変換問題の解法(4)および誤り許容性をもつ非同期ポリオートマトンについての議論(6)におけるモデルをさらに一般化したものである．

2．ポリオートマトンの定義

非決定性ポリオートマトン（または単にポリオートマトン）は5字組 $P=(M, L, V, E, S)$ である．ここで，

（1）Mは空でないモジュールの集合である．

（2）Lはつぎの条件を満足する M^2 の部分集合である：すべての $m \in M$ に対して，m の入力接続および出力接続の数は有限である．ただし，Lの任意の元 (m, m') を m' の入

力接続またはmの出力接続とよぶ.

(3) Vは空でない状態の集合である.

以下, 任意の写像c: $L \to V$ を状相とよぶ. (状相は各接続(m, m')に対して, mの出力状態を対応づける.)

(4) E (励起関数) は$C \times L$ (ここで, Cは状相のある集合) から2^Vへのつぎを満足する写像である: すべての$\ell \in L$に対してV^kのある部分集合から2^Vへの写像 (出力関数) $f_\ell^{(k)}$が存在して,

$$E(c, \ell) = f_\ell^{(k)}(c(\ell_1), c(\ell_2), \cdots, c(\ell_k)).$$

ここで, k ($k \geq 0$) はある整数, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k$ はℓを出力接続とするモジュールの入力接続であり, $f_\ell^{(0)}$は定数をあらわす.

(5) Sはつぎの条件を満足する状相の有限または無限系列 ($c_0, c_1, c_2, \cdots$) のある集合である:

(a) $c_i(\ell) \neq c_{i+1}(\ell)$ ならば, $c_{i+1}(\ell) \in E(c_i, \ell)$ かつ $c_i \neq c_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \cdots$), かつ

(b) c_nがこの系列の最後の状相ならば, $c_n(\ell) = E(c_n, \ell)$, ($\ell \in L$).

Sの任意の元をPの推移系列, 推移系列中にあらわれる状相を許容状相とよぶ.

任意のℓおよびcに対して, $E(c, \ell) = \{c(\ell)\}$のとき

ℓ は平衡している，また平衡していないとき ℓ は励起されているという。

3．ポリオートマトンの分類

3．1 構造上の分類．

ポリオートマトン $P=(M, L, V, E, S)$ は S 以外の要素の性質によってつぎのように分類される．

（1）$\begin{cases} \text{有限} \cdots M\text{が有限．} \\ \text{無限} \cdots M\text{が無限．} \end{cases}$

特につぎの条件を満足する無限ポリオートマトンは動作的に有限であるという：V にある特別な状態（休止状態）v_0 がふくまれ，すべての出力関数 $f^{(k)}$ に対して，$f^{(k)}(v_0, \cdots, v_0)=\{v_0\}$，かつすべての許容状相 c に対して，c の台，$\mathrm{sup}(c)=\{\ell\in L \mid c(\ell)\neq v_0\}$ が有限である．

（2）$\begin{cases} \text{連結} \cdots (M, L)\text{が連結グラフ．} \\ \text{非連結} \cdots (M, L)\text{が連結グラフではない} \end{cases}$

（3）単一出力型・・・すべての許容状相 c および $\ell, \ell'\in L$ に対して，ℓ と ℓ' が同一モジュールの出力接続ならば，$c(\ell)=c(\ell')$ かつ $E(c, \ell)=E(c, \ell')$．
　　複数出力型・・・単一出力型ではない．

任意の複数出力型のポリオートマトンに対して，これとある意味で等価な単一出力型のポリオートマトンを構成できる．

(4) $\begin{cases} \text{決定性}\cdots E\text{が}C\times L\text{から}SV\text{への写像である．} \\ \text{真に非決定性}\cdots\text{決定性ではない．} \end{cases}$

3.2　推移の性質による基本的分類．ポリオートマトンはSの性質からつぎの性質(5),(6),(7)をもつものともたないものに分類される．

(5) Pが履歴に依存しないとは，つぎのふたつの条件が満足されることである．

(a) $\forall(c_0, c_1, c_2, \cdots)\in S$, $(c_1, c_2, c_3, \cdots)\in S$.

(b) $\forall(c_0, c_1, c_2, \cdots), (c_0', c_1', c_2', \cdots)\in S$,

$c_1 = c_0'$ ならば $(c_0, c_1, c_1', c_2', \cdots)\in S$.

(6) Sがある2項関係Rから決定されるとは，状相の集合Cが存在して，推移系列の条件を満足し $c_i\,R\,c_{i+1}$ ($i=0, 1, 2, \cdots$) なるC上のすべての有限または無限系列 $(c_0, c_1, c_2, \cdots)$ はPの推移系列であり，かつすべての $c\in C$ に対して cRc' ならば $c'\in C$ なることである．

(7) Pが有限遅延型であるとは，Pのすべての推移系列 $(c_0, c_1, c_2, \cdots)$ がつぎの条件を満足することである：すべての $j\geq i$ に対して，$c_j(\ell)\neq v\in E(c_i, \ell)$ を満足する整数 i，接続 ℓ，および状態 v は存在しない．このような推移系列は許容列とよばれる．

3.3 推移の制御による分類

(9) $\begin{cases} \text{同期.} \\ \text{非同期.} \begin{cases} \text{部分的同期をふくむ.} \\ \text{部分的同期をふくまない.} \end{cases} \end{cases}$

これらの性質はつぎのように定義される．Pのふたつの接続ℓとℓ'が同期しているとは，Pの推移系列$(c_0, c_1, c_2, \cdots)$中の任意の状相c_iにおいてℓとℓ'が励起されておりかつ$c_{i+1}(\ell) \in E(c_i, \ell)$ならば，$c_{i+1}(\ell') \in E(c_i, \ell')$，$(i = 0, 1, 2, \cdots)$．Pのすべての接続の対が同期しているとき，Pを同期ポリオートマトンとよび，Pに同期していないふたつの接続が存在するかまたはすべてのPの許容状相において複数の接続が同時に励起されていることはないとき，Pを非同期ポリオートマトンとよぶ．また同期している接続の対をもつ非同期ポリオートマトンは部分的同期をふくむという．

この定義から，同期ポリオートマトンのクラスと非同期ポリオートマトンのクラスはtotally sequentialな（すべての許容状相において励起されている接続の個数が1以下であるような[1]）ポリオートマトンのクラスをふくむ共通部分をもつ（図2．以下，性質pを満足するポリオートマトンのクラスを$\mathcal{P}(p)$によってあらわす）．

命題1．図2．にしめされる関係が成立する．

（証明略）．

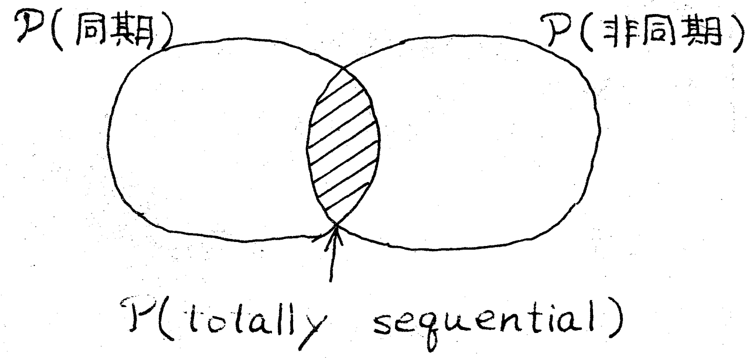

図 1.

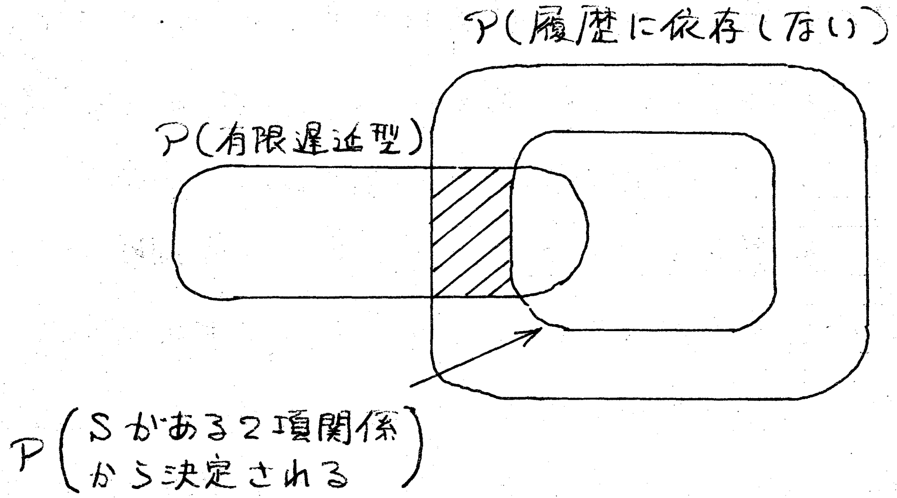

図 2.

3.4 例 (1) セル・オートマトン. 多くの文献において扱われているセル・オートマトンのモデルはつぎの条件を満足する無限, 単一出力型の同期ポリオートマトン (Z^d, L, V, E, S), (ここで, Z^d はすべての整数の d 字組の集合) である: Z^d の元の k ($k \geq 1$) 字組 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ と写像 $f^{(k)}$ が存在して,

(a) $L = \{(a,b) \in (Z^d)^2 \mid a = b + n_i \ (1 \leq i \leq k)\}$.

(b) $E(c,(a,b)) = f^{(k)}(c((a+n_1),a), \cdots,$
$c((a+n_k, a)))$, $(a,b) \in L$.

（2） Muller と Bartky[1] の非同期回路. これは有限，単一出力型，決定性の非同期ポリオートマトンであり，S はつぎの条件を満足するすべての許容列の集合である.

$\forall (c_0, c_1, c_2, \cdots) \in S, \ (c_1, c_2, c_3, \cdots) \in S.$

このポリオートマトンは履歴に依存せず，しかも遅延が有限である（したがって，図2の斜線部にふくまれる）.

（3） data flow program[3] および Petri net.

data flow program においては，ある演算要素のすべての入力接続が token とよばれる状態をもつとき，この要素はすべての token を取りさり出力接続が token をもつように変化させる. これは各モジュールのすべての入出力接続が同期している有限，複数出力型，決定性の非同期ポリオートマトンとして表現できる. さらにこれは token の伝達に対する"応答信号"を戻すための接続を加えることによって各モジュールの出力接続のみが同期している非同期ポリオートマトンとしても表現できる. 同様の考え方により，Petri net を部分的同期をふくまない非同期ポリオートマトンとして記述することができる.

4. Muller - Bartky 型非同期ポリオートマトン

前節(2) の非同期ポリオートマトンに対してこれまでつぎのような性質が定義されている.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\text{確定性}) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{P}\left(\begin{array}{l}\text{speed}\\ \text{independent}\end{array}\right) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{P}(\text{並行可能}) \\
& \mathcal{P}(\text{semmimodular}) \arrow[u, "*"'] & \\
\mathcal{P}(\text{s.o.c.}) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur] & \mathcal{P}(\text{totally sequential}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

図3.（$\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ は $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ を，また $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ が比較不能であることをあらわす．）

- totally sequentiality（Muller と Bartky[1]）.
- semimodularity（ 〃 ）.
- speed independence（ 〃 ）.
- s.o.c. 性（中村[4]）.
- 確定性（determinacy）（中村[5]）.
- 並行可能性（parallelizablity）（Nozaki[2]）.

これらの各性質をもつ部分クラス間に図3の関係が成立することが示されている(1),(2),(4),(5). つぎに並行可能性と確定性の関係をのべる.

命題2. $\mathcal{P}$(並行可能）と $\mathcal{P}$(確定性）は比較不能である.

＊ポリオートマトンのクラスを動作的に有限である無限ポリオートマトンまで拡張すると，この関係は成立せず，$\mathcal{P}$(speed independet）と $\mathcal{P}$(semimodular)は比較不能となる.

（証明）図4の推移図をもつ非同期回路は並行可能であるが確定性ではない。* また，図5の推移図をもつ非同期回路は確定性であるが並行可能ではない。** ■

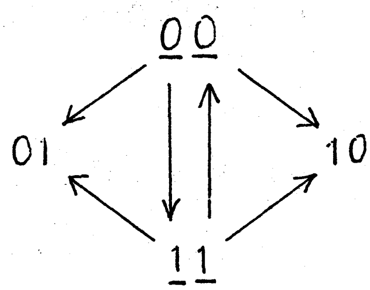

図4．（下線は対応するモジュールが励起されていることを示す。）

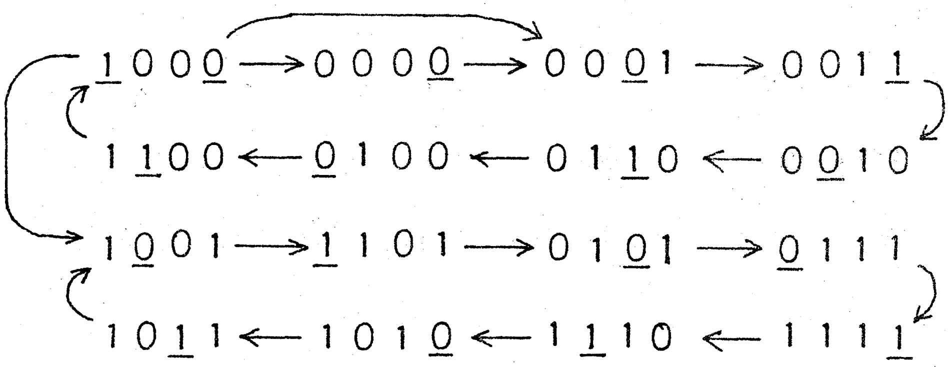

図5．

---

* これは並行可能ではあるが speed independent ではない回路の推移図の例ともなっている。

** これは確定性ではあるが speed independent ではない回路の推移図の例ともなっている。

6. むすび

残された問題として，各要素の遅延時間の上限および下限が制限された非同期システムをこの報告の形式化によってあつかう問題，および非同期ポリオートマトンの物理的な実現性に関する問題などがあげられる．

文献

(1) D. E. Muller and W. S. Bartky: A theory of asynchronous circuit, Proc. of Sympo. on the Theory of Switching, Harvard Univ. Press (1959).

(2) A. Nozaki: Hazard analysis of asynchronous circuits in Muller-Bartky sence. JCSS 13, pp161~171 (1966).

(3) J. B. Dennis: First Version of a Data Flow Procedure Languages, MIT/LCS/TM-61 (1975).

(4) 中村：非同期回路網の計算と実現，電子通信学会論文誌 Vol 59-D, p523 (1976).

(5) 〃：非同期回路網の確定性について，電子通信学会論文誌 Vol 60-D, p175 (1977).

(6) 〃：誤り許容性をもつ非同期ポリオートマトン，LA シンポジウム予稿 (1978).